Correction du TD3 Mécanique des solides

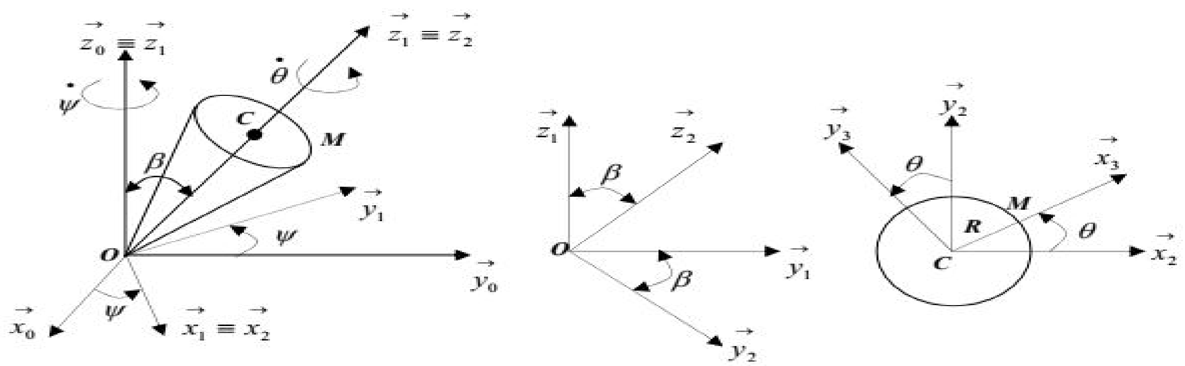
Exercice 1 :

Un cône homogène de hauteur $\boldsymbol{h}$, de rayon de base $\boldsymbol{R}$ est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical $\vec{z}_0$ d'un repère orthonormé fixe, avec une vitesse angulaire $\dot{\psi} = Cte$. L'axe principal du cône est incliné d'un angle β constant par rapport à cet axe. Le cône tourne aussi autour de son axe principal avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = Cte$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère R_2 est le repère relatif.

On prendra aussi le repère R_2 comme repère de projection.

Déterminer :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;
2. La vitesse et l'accélération du point $\boldsymbol{C}$ par dérivation ;
3. La vitesse et l'accélération du point $\boldsymbol{M}$ par composition de mouvement ;



Solution :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;

Nous avons : $OC = h$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe et R_2 : le repère de projection.

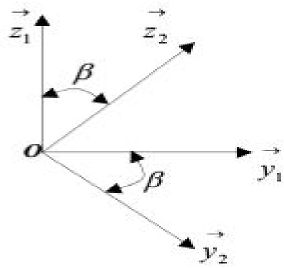
$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ avec $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$, $\dot{\psi} = Cte$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: tel que : $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \beta = Cte$ avec $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$, $\dot{\beta} = 0$

$R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: tel que : $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = \theta$ avec $\vec{\Omega}_3^2 = \dot{\theta}\,\vec{z}_2 = \dot{\theta}\,\vec{z}_3$, $\dot{\theta} = Cte$

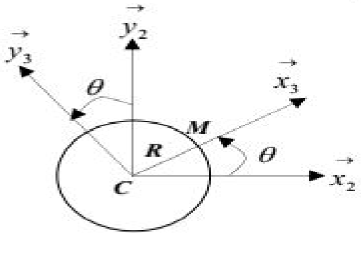
Matrice de passage de R_1 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



Matrice de passage de R_3 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vitesse et accélération du point C par dérivation ;

2.1. Vitesse

Nous avons : $\overrightarrow{OC} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}} + \underset{R_2}{\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ h \end{cases}}$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OC}$$, avec : $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$

or : $\vec{z}_1 = -\sin\beta\,\vec{y}_2 + \cos\beta\,\vec{z}_2$ d'où : $\vec{\Omega}_2^0 = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}}$

$$\vec{V}^0(C) = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} -\dot{\psi}h\sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

2.2. Accélération :

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0\vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(C)$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} -\dot{\psi}h\sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}^2 h\sin\beta\cos\beta \\ -\dot{\psi}^2 h\sin\beta\sin\beta \end{cases}}$$

3. Vitesse et accélération du point M par composition de mouvement ;

3.1 Vitesse :

Nous avons : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M)$,

avec: $\overrightarrow{OM} = \underset{R_2}{\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ h \end{cases}} \Rightarrow \vec{V}^2(M) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = \underset{R_2}{\begin{cases} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}}$

$$\vec{V}_2^0(M)=\vec{V}^0(O)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}=\begin{cases}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{cases}_{R_2}\wedge\begin{cases}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h\end{cases}_{R_2}=\begin{cases}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{cases}_{R_2}$$

ce qui donne : $\vec{V}^0(M)=\begin{cases}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta-R\dot{\theta}\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta+R\dot{\theta}\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{cases}_{R_2}$

3.2 Accélération :

Nous avons : $\vec{\gamma}^0(M)=\vec{\gamma}^2(M)+\vec{\gamma}_2^0(M)+\vec{\gamma}_c(M)$,

$$\vec{\gamma}^2(M)=\frac{d^2\vec{V}^2(M)}{dt}=\begin{cases}-R\dot{\theta}^2\cos\theta\\-R\dot{\theta}^2\sin\theta\\0\end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M)=\vec{\gamma}^0(O)+\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right);\quad \text{avec : } \vec{\gamma}^0(O)=\vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}=\frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{\Omega}_2^0=\vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right)=\begin{cases}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{cases}_{R_2}\wedge\begin{cases}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{cases}_{R_2}\wedge\begin{cases}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h\end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right)=\begin{cases}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{cases}_{R_2}\wedge\begin{cases}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM}\right) = \begin{cases} -R\dot{\psi}^2 \cos\theta \\ -\dot{\psi}^2 \cos\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) \\ -\dot{\psi}^2 \sin\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(M)\right) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\sin\beta \end{cases}_{R_2}$$

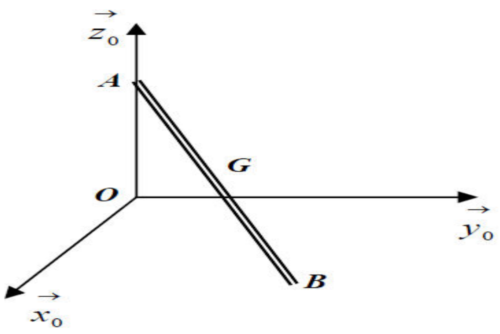
La somme de toutes ces expressions donne :

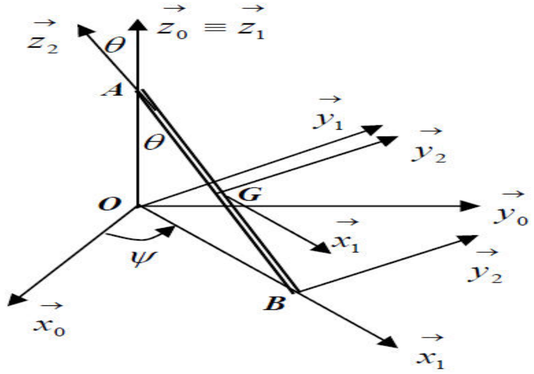
$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -R\cos\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\beta\right) \\ -\dot{\psi}^2\cos\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) - R\sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\beta\right) \\ -\dot{\psi}^2\sin\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) - 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\sin\beta \end{cases}_{R_2}$$

Exercice 2 :

Une tige homogène de longueur $AB = L$ et de centre G est en mouvement tel que, son extrémité A soit assujetti à se déplacer suivant l'axe vertical $(O, \vec{z}_0)$ d'un repère orthonormé fixe $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. L'autre extrémité B est en mouvement quelconque dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

1. Déterminer le nombre de paramètres nécessaires pour décrire totalement le mouvement de la tige et construire les différents repères permettant de faire l'étude cinématique de la tige ;
2. Déterminer la vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0
3. Déterminer les différentes figures planes et les matrices de passage;
4. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue des points A, B et G exprimé dans le repère R_1 .





Solution :

1. Repères et paramètres permettant l'étude du mouvement de la tige

$AB = L$; $A \in (O, \vec{z}_0)$ tous le temps, $B \in (x_0 O y_0)$

$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$, $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ et $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\psi}\vec{z}_0 = \dot{\psi}\vec{z}_1$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère tel que : $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \psi$ et $\vec{\Omega}_2^1 \equiv -\dot{\theta}\vec{y}_1 = -\dot{\theta}\vec{y}_2$

on a ainsi : $AB \in R_2$ tel que : $\overrightarrow{BA} = L\vec{z}_2$

Les deux angles ψ et θ sont suffisant pour décrire entièrement le mouvement de la barre par rapport au repère R_0.

2. Vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0

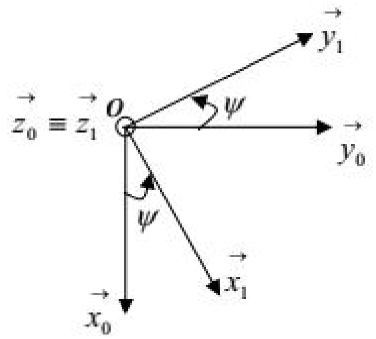
Nous avons : $\vec{\Omega}_2^0 \equiv \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 \equiv -\dot{\theta}\vec{y}_1 + \dot{\psi}\vec{z}_1 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_1}$

3. Figure plane de chaque repère ;

3.1. Matrice de passage du repère R_0 vers R_1

Matrice de passage de R_0 vers R_1

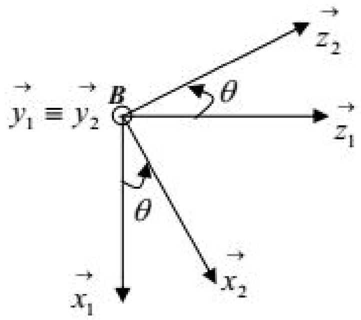
$$\begin{pmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix} \quad P_{R_0\to R_1}$$



3.1. Matrice de passage du repère R_2 vers R_1

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_2\\ \vec{y}_2\\ \vec{z}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix}$$

$$P_{R_2\to R_1}$$



$$\vec{\Omega}_2^0 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = -\dot{\theta}(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \left\{\begin{matrix}\dot{\theta}\sin\psi\\ -\dot{\theta}\cos\psi\\ \dot{\psi}\end{matrix}\right._{R_0}$$

On prendra R_1 comme repère de projection car les expressions cinématiques sont plus simples dans ce repère.

4. Vitesse et Accélération absolue des points *A, B* et *G* exprimé R_1.

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ L\cos\theta\end{matrix}\right._{R_1}$, $\overrightarrow{OB} = \left\{\begin{matrix}L\sin\theta\\ 0\\ 0\end{matrix}\right._{R_1}$, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \left\{\begin{matrix}\frac{L}{2}\sin\theta\\ 0\\ \frac{L}{2}\cos\theta\end{matrix}\right._{R_1}$

4.1. calcul de** $\vec{V}^0(A)$ **: $\vec{V}^0(A) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OA}}{dt} = \dfrac{d^1\,\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OA}$

$$\vec{V}^0(A) = \left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ -L\dot{\theta}\sin\theta\end{matrix}\right._{R_1} + \left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{matrix}\right._{R_1} \wedge \left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ L\cos\theta\end{matrix}\right._{R_1} = \left\{\begin{matrix}0\\ 0\\ -L\dot{\theta}\sin\theta\end{matrix}\right._{R_1}$$

4.2. calcul de $\vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B)=\frac{d^0\,\overrightarrow{OB}}{dt}=\frac{d^1\,\overrightarrow{OB}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{OB}$$

$$\vec{V}^0(B)=\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\0\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}L\sin\theta\\0\\0\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}_{R_1}$$

La vitesse du point B peut aussi s'obtenir à partir de celle de A par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(B)=\vec{V}^0(A)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}^0(B)=\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\-\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}L\sin\theta\\0\\-L\cos\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\-L\dot{\theta}\sin\theta+L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}_{R_1}$$

4.3. calcul de $\vec{V}^0(G)$: $\vec{V}^0(G)=\frac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt}=\frac{d^1\,\overrightarrow{OG}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{OG}$

$$\vec{V}^0(G)=\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\0\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}\frac{L}{2}\sin\theta\\0\\\frac{L}{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}$$

La vitesse du point G peut aussi s'obtenir à partir de celle de A où de B par la cinématique du solide, en effet nous avons :

$$\vec{V}^0(G)=\vec{V}^0(A)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}^0(G)=\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\-\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}\frac{L}{2}\sin\theta\\0\\-\frac{L}{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-L\dot{\theta}\sin\theta+\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}$$

4.4. calcul de $\vec{\gamma}^{0}(A)$ **:** $\vec{\gamma}^{0}(A)=\dfrac{d^{0}\vec{V}^{0}(A)}{dt}=\dfrac{d^{1}\vec{V}^{0}(A)}{dt}+\vec{\Omega}_{1}^{0}\wedge\vec{V}^{0}(A)$

$$\vec{V}^{0}(A)=\begin{cases}0\\0\\-L\ddot{\theta}\sin\theta-L\dot{\theta}^{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}0\\0\\-L\ddot{\theta}\sin\theta-L\dot{\theta}^{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}$$

4.5. calcul de $\vec{\gamma}^{0}(B)$ **:** $\vec{\gamma}^{0}(B)=\dfrac{d^{0}\vec{V}^{0}(B)}{dt}=\dfrac{d^{1}\vec{V}^{0}(B)}{dt}+\vec{\Omega}_{1}^{0}\wedge\vec{V}^{0}(B)$

$$\vec{V}^{0}(B)=\begin{cases}L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^{2}\sin\theta\\L\ddot{\psi}\sin\theta+L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}^{0}(B)=\begin{cases}L\ddot{\theta}\cos\theta-L(\dot{\theta}^{2}+L\dot{\psi}^{2})\sin\theta\\L\ddot{\psi}\sin\theta+2L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\0\end{cases}_{R_1}$$

4.6. calcul de $\vec{\gamma}^{0}(G)$ **:** $\vec{\gamma}^{0}(G)=\dfrac{d^{0}\vec{V}^{0}(G)}{dt}=\dfrac{d^{1}\vec{V}^{0}(G)}{dt}+\vec{\Omega}_{1}^{0}\wedge\vec{V}^{0}(G)$

$$\vec{\gamma}^{0}(B)=\begin{cases}\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^{2}\sin\theta\\\frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta+\frac{L}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\-\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^{0}(B)=\begin{cases}\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^{2}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\psi}^{2}\sin\theta\\\frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta+L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\-\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^{2}\cos\theta\end{cases}_{R_1}$$

Exercice 3 :

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras *(1)*** en rotation dans le plan horizontal tel que : $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$:repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=\psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe $\vec{x}_1$ tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=\theta$ sens positif ; $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec ***OB = R.***

Un siège-pilote *(3)* en rotation autour de l'axe $\vec{y}_2$ tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2,\vec{x}_3)=(\vec{z}_2,\vec{z}_3)=\varphi$ sens positif. $R_3(B,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{BT}=L\,\vec{z}_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

---

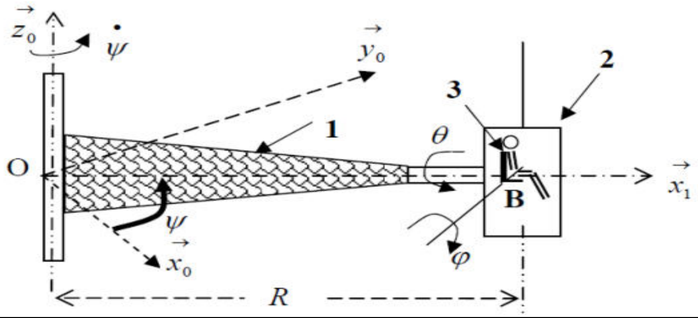
1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

2) Trouver le vecteur position du point ***T***, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à $\boldsymbol{R_0}$;

3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point ***T*** par composition de mouvement et par la cinématique du solide.

4) Déterminer l'accélération absolue du point ***T*** par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

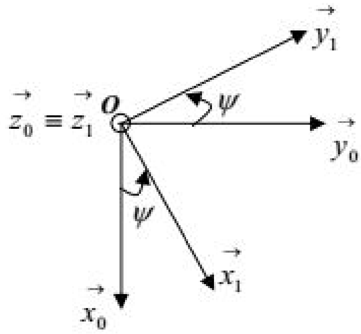
a) Rotation du bras

Nous avons : $OB = R$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe. R_2 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_0 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

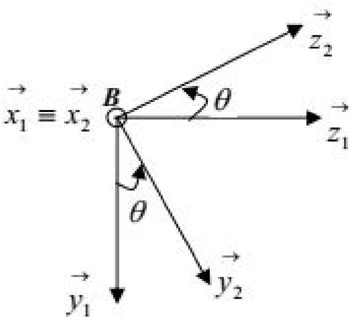


a) Rotation du **cockpit**

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

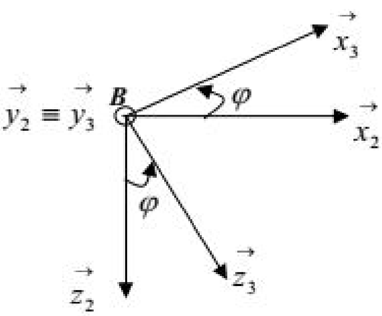


a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_3 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_2

Nous avons : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, sachant que $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1,R_2} \; ; \quad \overrightarrow{BT} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} \quad \text{d'où : } \overrightarrow{OT} = \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur $\vec{z}_1$ 'écrit : $\vec{z}_1 = \sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\left(\sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2\right) = \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

La vitesse relative est donnée par : $\vec{V}^2(T) = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{BT}}{dt} \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}$

$$\vec{V}_2^0(T) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

3.2. Par la cinématique du solide

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT}$

Nous avons : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\theta \\ -R\dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

4. Accélération absolue du point *T* par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{abs}(T) = \vec{\gamma}_{rel}(T) + \vec{\gamma}_{ent}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$

$\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^2(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$

Explicitons chacun des termes de cette relation :

$$\textbf{(1) :}\quad \vec{\gamma}^{2}(T) == \frac{d^{2}\vec{V}^{2}(T)}{dt} \quad {}_{R_2}\begin{cases} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^{2}\sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^{2}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_{2}^{0}(T) = \vec{\gamma}^{0}(O) + \frac{d^{0}\vec{\Omega}_{2}^{0}}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^{0}(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^{0}\vec{\Omega}_{2}^{0}}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = \frac{d^{2}\vec{\Omega}_{2}^{0}}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = {}_{R_2}\begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \wedge \quad {}_{R_2}\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

$$\textbf{(2) :}\quad \frac{d^{0}\vec{\Omega}_{2}^{0}}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = \quad {}_{R_2}\begin{cases} L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ L\ddot{\theta}\cos\varphi + (R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -(R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\overrightarrow{OT}\right) = {}_{R_2}\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad {}_{R_2}\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad {}_{R_2}\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{2}^{0}\wedge\overrightarrow{OT}\right) = {}_{R_2}\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad {}_{R_2}\begin{cases} L\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}$$

(3) : $\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right) = \begin{cases} -\dot{\psi}^2(R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta(R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}^2\cos\varphi\cos\theta\sin\theta \\ -L\dot{\theta}^2\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta(R + L\sin\varphi) - L\dot{\psi}^2\cos\varphi\sin^2\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(T)\right)$$

(4) : $\vec{\gamma}_c(T) = 2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi + 2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \\ -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$\vec{\gamma}^0(T) =$ **(1) +(2) +(3) + (4)**